中国海洋大学2019年硕士研究生招生考试试题

科目代码： 638　　**科目名称：** 量子力学

一、（20分）在 $t=0$ 时刻一粒子由下面的波函数描述

$$\Psi(x,0)=\begin{cases} A\dfrac{x}{a}, 0\le x\le a \\ A\dfrac{(b-x)}{(b-a)}, a\le x\le b \\ 0, 其它地方 \end{cases}$$

式中 A, a, 和 b 是常数。

1. 归一化的 Ψ（即求出以 a 和 b 表示的 A）。
2. 在 $t=0$ 时刻在哪里最有可能发现粒子？
3. 在 a 的左边发现粒子的概率是多少？对 $b=a$ 和 $b=2a$ 两种极限情况验证你的结果。
4. x 的期待值是多少？

二、（20分）已知粒子的坐标 $\vec{r}$ 和动量 $\vec{p}$ 为厄米算符，判断下列算符是否为厄米算符，$\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}$，$\vec{r}\cdot\vec{p}$，$\vec{p}\times\vec{l}$，$\vec{r}\times\vec{l}$。如果不是，构造相应的厄米算符。

三、（20分）某个三能级体系的哈密顿的矩阵表示为

$$H=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$，式中 a, b, c 都是实数。

1. 如果体系的初态是 $|\Psi(0)\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，求 $|\Psi(t)\rangle$。

2. 如果体系的初态是 $|\Psi(0)\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，求 $|\Psi(t)\rangle$。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

四、（20 分）已知$S_z|+\rangle=\frac{\hbar}{2}|+\rangle, S_z|-\rangle=-\frac{\hbar}{2}|-\rangle$，且$|+\rangle,|-\rangle$是正交的。

1. 证明算符S_x，S_y，S_z有以下外积表示：

$$S_x=\frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|), S_y=\frac{i\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|), S_z=\frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|).$$

2. 证明$[S_i,S_j]=i\varepsilon_{ijk}\hbar S_k, \{S_i,S_j\}=\frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}$，其中{ }为反对易算符，满足关系式

{A, B}=AB-BA。

五、（20 分）设力学量不显含 t，

1. H 为体系的 Hamiltonian, 证明

$$-\hbar^2\frac{d^2}{dt^2}\overline{A}=\overline{[[A,H],H]}$$

2. 证明在束缚定态下$\frac{d\overline{A}}{dt}=0.$

六、（25 分）设两个全同的玻色子处于宽度为a的一维无限深方势阱中，

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x<0,\quad x>a\end{cases}$$

两者通过势场$V(x_1,x_2)=-aV_0\delta(x_1-x_2)$有微弱的相互作用。（$V_0$是具有能量量纲的一个常数）。已知一维无限深方势阱中的放入单粒子态的波函数$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$，能量$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$。

1. 首先忽略粒子间的相互作用，求基态和第一激发态——包括波函数和对应的能量。

2. 利用一级微扰理论估算粒子相互作用对基态、第一激发态能量的影响。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

七、（25 分） 对一维谐振子 $H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{1}{2}\omega^2x^2$，设 $|n\rangle$, $n=0,1,2,\cdots$，为其能量本征态，定义消灭算符和产生算符

$$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x+\frac{ip}{m\omega}),\quad a^{+}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x-\frac{ip}{m\omega}),$$

它们满足 $[a,a^{+}]=1$，$a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$，$a^{+}|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$，$a^{+}a|n\rangle=n|n\rangle$，

并称 $N=a^{+}a$ 为粒子数算符。

1. 计算谐振子处于 n 态 $|n\rangle$ 时的 $\langle x\rangle,\langle p\rangle,\langle x^2\rangle,\langle p^2\rangle$ 及动能 $\langle T\rangle$ 的平均值。

2. 验证处于 n 态时满足不确定性原理。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。