中国海洋大学2019年硕士研究生招生考试试题

科目代码： 617　　**科目名称：** 数学分析

一、计算题（要求有计算过程，共4题，每题10分，共40分）．

1. 已知 $f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_n$ 为 n 个正数．求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$．

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$．

3. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$（若极限不存在，说明理由）．

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的和函数．

二、问答题（给出答案并说明理由，共3题，每题10分，共30分）．

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f(x)>0$，且满足

$$\left(x^2+1\right)f(x)=4\int_0^x tf(t)dt+3.$$

求函数 $f(x)$ 的表达式．

2. 求常数 λ，使得曲线积分 $\int_L \dfrac{x}{y}r^{\lambda}dx-\dfrac{x^2}{y^2}r^{\lambda}dy=0$ 对上半平面内任何光滑闭曲线 L 成立，其中，$r=\sqrt{x^2+y^2}$．

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x^{\frac{4}{3}}\sin\dfrac{y}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$，试确定 $f(x,y)$ 在平面中的所有可微点与不可微点．

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

三、（10 分）证明二元函数 $z=\left(1+e^{y}\right)\cos x-ye^{y}$ 有无穷多个极大值点，而没有任何极小值点.

四、（10 分）若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x)$ 在 I 上有界，则 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

五、（15 分）请判断下列命题是否成立？若成立，请给出证明，若不成立，请给出反例.

（1）若函数 $f(x)$ 在 x_0 取极值，且右导数 $f'_+(x_0)$ 存在，则 $f'_+(x_0)=0$；

（2）若函数 $f(x)$ 在 x_0 取极值，且右导数 $f'_+(x_0)$ 在 x_0 连续，则 $f'_+(x_0)=0$.

六、（15 分）设 $u_1=2$，$u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{1}{u_n}\right)$，$n$ 为正整数. 证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在；（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

七、（15 分）已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$. 计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy.$$

八、（15 分）计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy,$$

其中 Σ: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。