中国海洋大学 2019 年硕士研究生招生考试试题

科目代码： 856　　　　**科目名称：** 高等代数

一、填空题（每题 6 分，共 60 分。）

1. 设多项式$f(x) = x^3 + px + q$有重根，则p, q应满足______________。

2. n 阶行列式$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$=____________。

3. 设A是 5×4 矩阵，$r(A)$=2，$\alpha_1 = (1,2,0,1)'$，$\alpha_2 = (2,1,1,3)'$是 $Ax=b$ 的两个解，$\alpha_3 = (1,0,1,0)'$是对应导出组 $Ax=0$ 的一个解，则 $Ax=b$ 的通解为______________________。

4. 设A是2×2矩阵，若可逆矩阵 P =（α，β）满足$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$Q$ =（β, α），则$Q^{-1}AQ =$____________。

5. 设A, B是可逆矩阵，则$\begin{bmatrix} O & 2A \\ AB & O \end{bmatrix}^{-1}$=____________。

6. 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$的正惯性指数为_______，负惯性指数为_______。

7. 向量空间 R^4 中，向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,1)$，$\alpha_2 = (4,3,5,-1)$，$\alpha_3 = (a,1,3,-b)$ 生成的子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的维数为 2，则 a=______，b=______。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

8. 设A是三阶实矩阵，且行列式$|A| = 4$，A的一个特征值是$1-i$,，则

$|2A - A^* - E| =$______________。

9. σ 是 n 维线性空间 V 的对合变换（即$\sigma^2 = \varepsilon$（单位变换）），则值域 σV

的维数为______，核$\sigma^{-1}(0)$的维数为__________。

10. 已知$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & b \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$可对角化，2 是它的二重特征值，则 a=______，

b=_______。

二.（20 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 2 \\ -x_2 + px_3 - 2x_4 = q \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + (p+3)x_4 = -1 \end{cases}$，问参数 p，

q 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？有解时，求出所有解。

三.（20 分）设 σ 是 n 维线性空间R^n上的一个变换，且$\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$

$(0, x_1, \cdots, x_{n-1})$。

（1）证明σ是R^n上的线性变换。

（2）求$\sigma^{-1}(0)$和σV的基和维数。

（3）$\sigma^{-1}(0) + \sigma V$是否为直和，说明理由。

四.（20 分）（1）设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，如果$\sigma^{k-1}\xi \neq \vec{0}$，

但$\sigma^k \xi = \vec{0}$，求证：$\xi, \sigma\xi, \cdots, \sigma^{k-1}\xi$ $(k > 0)$线性无关。

（2）在 n 维线性空间 V 中，设有线性变换 σ 与向量ξ，使得$\sigma^{n-1}\xi \neq \vec{0}$，

但$\sigma^n\xi=\vec{0}$。求证：σ 在某组基下的矩阵是$\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$.

五.（10 分）求矩阵$\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$的若当标准形和有理标准形。

六.（20 分）用正交线性替换将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$化为标准形。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。