中国海洋大学2018年硕士研究生招生考试试题

科目代码: 617　　科目名称: 数学分析

(本试卷共八道大题, 满分150分)

一、问答题(共3题, 每题10分, 共30分).

1. 以下两个集合的内部, 边界与聚点集各是什么? (给出答案, 无需说明理由)

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)(y^2-x^2+1) \le 0\};$$

$$S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x \le 1, y = \sin\frac{1}{x}\right\}.$$

2. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$是绝对收敛、条件收敛、还是发散的? (给出答案并说明理由)

3. 极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^2y+y^4\right)}{x^2+y^2}$是否存在? 若存在极限值是多少? (给出答案并说明理由)

二、计算题(要求有计算过程, 共4题, 每题10分, 共40分).

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2. 求$f(x) = \dfrac{x}{2-x-x^2}$在$x=0$处的幂级数展开式并确定收敛范围.

3. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x - \sin^2 x}{x^4}$.

4. 求$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$的极值, 并判明是极大值还是极小值.

特别提醒: 答案必须写在答题纸上, 若写在试卷或草稿纸上无效。

三、(10分) 讨论广义积分是收敛的还是发散的: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}\,dx$, 其中$p>0, q>0$.

四、(10分) 设$x_1=1$, $x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$. 证明此序列是收敛的, 并求极限值.

五、(15分) 设$f(x), g(x)$均为$[0,1]$上的连续函数,且$f(x)$ 与$g(x)$在$[0,1]$上有相同的上确界. 证明存在$\xi\in[0,1]$,使得$f(\xi)=g(\xi)$.

六、(15分) 设$f(x)$在区间$(0,1)$上非负且三阶可导.若存在$x_1, x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$,使得$f(x_1)=f(x_2)=0$,证明存在$a\in(0,1)$,使得$f'''(a)=0$.

七、(15分) 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{t}\sin t\,dt=0$.

八、(15分) 设$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x>0, y>0, z>0\}$, $f(x,y,z): \Omega\to\mathbb{R}$是连续可导的. 若对任意的$t>0$以及任意的$(x,y,z)\in\Omega$均有$f(tx,ty,tz)=t^{-3}f(x,y,z)$, 证明: 对$\Omega$中任意的光滑闭曲面$S$, 均有$\iint_S f(x,y,z)\,(x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)=0$.