中国海洋大学2018年硕士研究生招生考试试题

科目代码：610　　科目名称：高等数学

一、填空题（每小题4分，共36分）

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=$(　).

2. 定积分$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=$(　).

3. 曲线$y=\sin^{\frac{5}{2}}x\ (0\le x\le \pi)$与$x$轴所围平面图形绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积为(　).

4. 已知数列$\{a_n\}$单调递减收敛于零，且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$不存在，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域为(　).

5. 曲线$y=\ln(1-x^2)$在$0\le x\le\frac{1}{2}$之间的一段弧长为(　).

6. 微分方程$y''+\frac{1}{x}y'=0$满足$y(1)=0, y'(1)=1$的特解为$y=$(　).

7. 设$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，$\overrightarrow{\alpha_3}$是3个线性相关的三维列向量，$\overrightarrow{\alpha_1}$与$\overrightarrow{\alpha_2}$无关，$A^*$是三阶矩阵$A=[\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}]$的伴随矩阵，则$A^*X=0$的通解$X=$(　).

8. 设n阶实矩阵A的各行元素之和为6，秩$r(A)=1$，则A的所有特征值之和为(　).

9. 记$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a_n}$的收敛域为(　).

二、选择题（每小题4分，共16分）

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

1. 函数 $f(x) = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的值域为( ).

(A) $[-1,+\infty)$； (B) $[0,+\infty)$； (C) $(-\infty,-1]$； (D) $(-\infty,0]$.

2. 若 $\rho \to 0^+$ 时，$I(\rho) = \iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} e^{x^2y^3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}d\sigma$ 与 ρ^n 是同阶无穷小，则

$n =$( ).

(A) 4； (B) 5； (C) 6； (D) 7.

3. 设 A 为三阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，I 为单位矩阵，且 $|A| = 3$，$2A - I$ 与

$A - 2I$ 均不可逆，则 A^* 三个特征值分别为( ).

(A) $1, 2, 3$； (B) $1, \frac{3}{2}, 3$； (C) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$； (D) $1, \frac{3}{2}, 6$.

4. 二次型 $f = 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 在正交变换下化为标准形

为( ).

(A) $2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$； (B) $2y_1^2 + 2y_2^2 - 6y_3^2$；

(C) $2y_1^2 + 6y_2^2 - 4y_3^2$； (D) $-2y_1^2 - 4y_2^2 - 6y_3^2$.

三、完成下列各题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 计算定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

2. 求方程 $x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 32$ 所确定隐函数 $y = y(x)$ 的极值.

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，求 $f'''(0)$.

4. 求微分方程 $[\sin(xy) + xy\cos(xy)]dx + x^2\cos(xy)dy = 0$ 的通解.

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

5. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展成麦克劳林级数，并求收敛域.

四、(10 分) 设 $f(x)$ 连续，且满足积分方程 $f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$

求 $f(x)$ 的表达式.

五、(10 分) 记 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围空间区域. 计算三重积分

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+x+y+z)dV.$$

六、(10 分) 记 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$ ($0\le z\le 1$) 取下侧. 计算第二类曲面积分

$$I=\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+(z-1)dxdy.$$

七、(10 分) 已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ (a > 0) 对应的实对称矩阵的特征值之积为 -9，求 a 的值及正交变换 $X=QY$ 将 f 化为标准型.

八、证明题（每小题 9 分，共 18 分）

1. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=1$，记 $F(x)=(1-e^{2x})f(x)$，证明：曲线 $y=F(x)$ 必有拐点.

2. 设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，$g(x,y)>0$，证明：至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使成立

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)d\sigma.$$

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。