中国海洋大学2020年硕士研究生招生考试试题

科目代码： 617　　　**科目名称：** 数学分析

说明：本试卷共九道大题，满分150分.

一、求下列极限(要求有计算过程，共2题，每题8分，共16分).

1. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}[\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}]$ ；

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

二、判断题（正确的给予证明，错误的举一反例，共3题，每题8分，共24分）

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)>0$，则

   $\exists r>0,\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)>r$.

2. 若函数 $f(x)$ 可导，则其导函数 $f'(x)$ 不存在第二类间断点.

3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

三、(15分) 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

证明：在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

四、(15分) 若 E 是非空有上界实数集，设 $\sup E=a$，且 $a\notin E$.

证明：存在数列 $\{x_n\}, x_n\in E, x_n<x_{n-1}, n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

五、(20分) 设 $f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t$.

证明：(1) $f(x)$ 满足微分方程 $f'(x)+2xf(x)=0$.

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

六、（10 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 回答下列问题：

（1）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否连续？为什么？

（2）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否可微？为什么？

七、（20 分）若函数列 $\{g_n(x)\}$ 满足下列条件：

（1） $g_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上非负连续，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}g_n(x)\,\mathrm{d}x=1$.

（2） $\forall c\in(0,1)$, $\{g_n(x)\}$ 在 $[-1,-c]$ 与 $[c,1]$ 上一致收敛于 0.

证明：对 $[-1,1]$ 上任意连续函数 $f(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x=f(0).$$

八、（18 分）设 $\{a_n\}$ 是正的单调增加数列．证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 有界．

九、（12 分）计算封闭曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\,(a>0)$ 所围成的立体的体积．

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。