中国海洋大学 2020 年硕士研究生招生考试试题

科目代码： 638 **科目名称：** 量子力学

一、(15 分) 一束光通过双缝可以在缝后的观测屏上产生明暗相间的干涉条纹，这就是我们熟悉的杨氏双缝实验。如果我们改变一下实验装置，将光源 S 衰减到单光子级别，使其一个一个地发出光子射向双缝，并且控制光子的发出时间，当前一个光子达到观察屏后才发出下一个光子。此时，若在双缝后的观察屏上安置许多单光子探测器（接收到一个光子会发生响应），请问：

1. 不考虑光子损耗，每次实验，即每发射一个光子，会出现什么现象？
2. 非常多次的实验结果如何？
3. 若采用某种方法确定光子经过某个缝，实验结果又如何？
4. 这里的双缝干涉是在不同光子之间发生的吗？为什么？
5. 你认为光子是怎么穿过双缝的？这反映了光子的什么性质（粒子性、波动性）？

二、(15 分) 两个自旋都是$1/2$的粒子 1 和 2 组成的系统，处于由波函数$|\psi\rangle = a|0\rangle_1|1\rangle_2 + b|1\rangle_1|0\rangle_2$描写的状态，其中$|0\rangle$表示自旋朝下（沿$-z$方向），$|1\rangle$表示自旋朝上。当$a$和$b$都不为零时，此态不能表示成两个单粒子状态的直接乘积形式$|\ \rangle_1|\ \rangle_2$，这种状态称为纠缠态。试求在上面的纠缠态中，

1. 两个粒子的自旋指向相同的几率；
2. 两个粒子的自旋指向相反的几率；
3. 此系统处于总自旋为零的几率；
4. 测量得到粒子 1 自旋朝上的几率多大？测得粒子 1 自旋朝上时，求粒子 2 的状态以及相应的概率？
5. 根据以上纠缠态的定义，请问两粒子自旋单态和三重态中是否有纠缠态，如果有，请全部写出来。

三、(15 分) 如果算符 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 对易，算符 $\hat{B}$ 与 $\hat{C}$ 对易，那么算符$\hat{A}$ 与 $\hat{C}$ 一定对易吗？如果是，请给出证明过程；如果不是，请举出反例。

四、(20 分) 一个质量为m的粒子处于一维谐振子势$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$中运动，$\omega$为振动频率，如果$t = 0$时粒子所处的状态$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0(x) + c\psi_2(x)$，其中$\psi_0(x)$ 与 $\psi_2(x)$分别为一维谐振子的基态与第二激发态的能量本征函数，c为待定常数，且$c > 0$。

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

1. 由归一化条件，求常数c；

2. 求 t 时刻粒子所处的状态$\psi(x,t)$；

3. 求测量粒子能量的可能值及其相应的概率；

4. 求粒子的能量平均值；

5. 若$t=\tau$时，粒子所处的势场突变为$V'(x)=\frac{1}{3}m\omega^2x^2$，求粒子在$\tau$ 时刻处于新势场$V'(x)$的第一激发态的概率。

提示：$H_0(\xi)=1$，$H_1(\xi)=2\xi$，$H_2(\xi)=4\xi^2-2$。

五、(15 分）一个算符$\hat{A}$表示可观测 A，它的两个归一化本征态是ψ_1和ψ_2，分别对应本征值a_1和a_2。算符$\hat{B}$表示可观测量 B，它的两个归一化本征态是ϕ_1和ϕ_2，分别对应本征值b_1和b_2。两组本征态之间满足如下关系：

$$\psi_1=(3\phi_1+4\phi_2)/5,\quad \psi_2=(4\phi_1-3\phi_2)/5$$

求：

1. 测量可观测量 A，所得结果为a_2。那么测量之后（瞬时）体系处于什么态？

2. 如果现在再测量 B，可能的结果是什么？它们出现的概率是多少？

3. 在恰好测出 B 之后，再次测量 A。那么结果为a_1的概率是多少？

六、(20 分)在一维无限深方势阱 $V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \infty, & x<0, x>a\end{cases}$ 中有两个质量为m 的全同粒子。

1. 若粒子的自旋 $s=0$，粒子之间不存在相互作用，写出体系最低两个能级，指出简并度，并给出相应的波函数。

2. 若粒子的自旋$s=1/2$，粒子之间不存在相互作用，写出体系最低两个能级，指出简并度，并给出相应的波函数。

3. 若粒子的自旋 $s=1/2$，粒子之间只存在与自旋相关的相互作用力势$V=A\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2\ (A>0)$，写出体系最低两个能级，指出简并度，并给出相应的波函数。

七、(20 分）若σ_x，σ_y，σ_z为泡利矩阵。

1. 试在σ_z表象中，分别写出σ_x和σ_y的本征值和相应的本征态。

2. 给出σ_z表象到σ_y表象的幺正变换矩阵S_{zy}。

3. 试在σ_y表象中，分别求σ_z和σ_x的本征值和相应的本征态。

八、(30 分）电子束预先进入一个 Stern-Gerlach 装置后，将其自旋分量为$S_z=-\hbar/2$ 的一束引入一个沿 (θ,φ)方向的均匀恒定磁场 $\boldsymbol{B}=B\,\boldsymbol{n}(\theta,\varphi)$中。电子的磁矩为 $\hat{\boldsymbol{\mu}}=\gamma\hat{\boldsymbol{S}}$，其中

特别提醒：答案必须写在答题纸上，若写在试卷或草稿纸上无效。

$\hat{\boldsymbol{S}} = \hbar/2\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}$是电子自旋算符。忽略电子的轨道运动。$(\theta, \varphi)$方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{n}(\theta,\varphi) = (sin\theta cos\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\theta)$$

1. 写出电子在均匀恒定磁场$\boldsymbol{B}$运动时的哈密顿，并求在此后 t 时刻（离开磁场之前）电子的波函数。

2. 求 $t(>0)$时刻，电子仍处于该态的概率。

3. 求t 时刻电子在恒定磁场中的自旋平均值$\langle\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{t})\rangle$，并描述其随时间变化的图像$d\langle\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{t})\rangle/dt$。